BAREME CLASA a VI-a

Subiectul 1

Să se determine cel mai mic număr natural format din 30 de cifre care are suma cifrelor 30 şi se divide la 30.

Gazeta Matematică 7/2005

Solutie:

Fie A numarul cautat.

Din $A \vdots 30$ obtinem ca ultima cifra a numarului A este 0. ………………1p

Deoarece 30= $2 \cdot 3 \cdot 5$ rezulta ca numarul A este divizibil cu 3. …………1p

Pentru a obtine un numar cat mai mic, trebuie sa gasim o scriere a lui 30 ca suma de cat mai putine numere nenule. Fie aceasta 9+9+9+3. …………2p

Pentru ca numarul format sa fie cel mai mic alegem prima cifra 1. …….1p

Obtinem numarul $1\underbrace{000...000}_{25 \text{ cifre}}2990$ …………………………………….... 2p

Subiectul 2

Aflaţi numărul natural $\overline{abc}$, scris în baza 10, ştiind că :

$$10 \cdot \left(\frac{\overline{ab}}{c} - 1 \right) + \frac{\overline{bc}}{a} = 82.$$

Prof. Stanica Nicolae, Braila

Solutie:

Avem succesiv:

$\frac{10 \cdot \overline{ab}}{c} + \frac{\overline{bc}}{a} = 92$ sau $\frac{\overline{ab0}}{c} + \frac{\overline{bc}}{a} = 92$ sau $\frac{\overline{abc} - c}{c} + \frac{\overline{abc} - 100a}{a} = 92$ …………2p

$$\frac{\overline{abc}}{c}-1+\frac{\overline{abc}}{a}-100=92 \text{ sau } \overline{abc}\cdot\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)=193 \text{ sau } \overline{abc}\cdot(a+c)=193\cdot a\cdot c \text{ ……2p}$$

Deoarece 193 este numar prim, obtinem ca $\overline{abc}\,\vdots\,193$

Deci $\overline{abc}\in\ 193;386;579;772;965$ ……………………………………………1p

Dintre cele 5 numere doar 386 verifica relatia din enuntul problemei. …...1p

Subiectul 3

Fie unghiul $\sphericalangle XOY$, $m\ \sphericalangle XOY\ =\alpha^0=$constant, $0<\alpha<90$, P un punct variabil în interiorul unghiului $\sphericalangle XOY$, nesituat pe bisectoarea acestuia, M şi N simetricele lui P față de OX şi OY. Ducem $PS\perp OM$, $S\in OM$, $PR\perp ON$, $R\in ON$, $PS\cap OX=\ H\ $, $PR\cap OY=\ T\ $.

a) Demonstrați că $NT\,||\,MH$.

b) Arătați că $m\ \sphericalangle PMH\ +m\ \sphericalangle PNT\ =$constantă.

Prof. Carmen Botea, Brăila

Solutie:

a) In triunghiul OMP, H este ortocentru $\Rightarrow$ MH$\perp$OP (1)………………..1p
In triunghiul ONP, T este ortocentru $\Rightarrow$ NT$\perp$OP (2)...............………1p
Din (1) si (2) obtinem MH$||$NT…………………..............…...………1p

b) Fie $MH\cap OP=\ A\ $ si $NT\cap OP=\ B\ $.
$\sphericalangle PMH\equiv\sphericalangle POH(acelasi\ complement\ \sphericalangle OHA)$ (3)………………………..1p
$\sphericalangle PNT\equiv\sphericalangle POT(acelasi\ complement\ \sphericalangle OTB)$ (4)…………………………1p
Din (3) si (4) obtinem
$m\ \sphericalangle PMH\ +m\ \sphericalangle PNT\ =m\ \sphericalangle POH\ +m\ \sphericalangle POT\ =\alpha^\circ$ …........................2p

Subiectul 4

Fie triunghiul *ABC*, *I* centrul cercului său înscris şi $AI \cap BC = D$.
O dreaptă perpendiculară pe dreapta *AI* intersectează AB şi AC în punctele *P* şi respectiv *Q*. Notăm cu *M* şi *N* $M \in BD$, $N \in DC$ simetricele punctelor *P* şi *Q* față de dreptele *BI* şi respectiv *CI*. Să se demonstreze că $MD = DN$ dacă şi numai dacă $AB = AC$.

Prof. Marius Damian, Brăila

Solutie:

Dreapta AI este mediatoarea segmentului PQ; atunci:
(1) $IP = IQ$.
Ținând cont că BI şi CI sunt bisectoare, deducem că punctele *M* şi *N* sunt situate pe latura *BC*...**1p**
Totodată, *BI* este mediatoarea segmentului PM, de unde rezultă:
(2) $IP = IM$,
iar *CI* este mediatoarea segmentului QN, deci:
(3) $IQ = IN$. **1p**
Din (1), (2) şi (3), obținem $IM = IN$, deci triunghiul *IMN* este isoscel.............................**1p**

Trecem la justificarea celor două implicații.

"$\Rightarrow$": Dacă $MD = DN$, atunci, ținând cont că $\triangle IMN$ este isoscel, rezultă că $ID \perp MN$, adică $AD \perp BC$. De aici şi din faptul că AD este bisectoarea unghiului *BAC*, urmează că triunghiul ABC aste isoscel, cu $AB = AC$. **2p**

"$\Leftarrow$": Dacă $AB = AC$, atunci, ținând cont că AD este bisectoarea unghiului *BAC*, rezultă că $AD \perp BC$, adică $ID \perp MN$. De aici şi din faptul că $\triangle IMN$ este isoscel, urmează că $MD = DN$.
....**2p**